

8. $\int \arcsin x dx$ Ж: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
9. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$ Ж: $C - \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$.
10. $\int x^2 \sin x dx$ Ж: $C - x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x$.
11. $\int \sin \ln x dx$ Ж: $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.
12. $\int \sqrt{4+x^2} dx$ Ж: $\frac{x}{2} \sqrt{4+x^2} + 2 \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$.

2- мустақил иш

Аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int x \sqrt{x-1} dx$ Ж: $\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ Ж: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|1 + \sqrt[4]{x}| + C$.
3. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ Ж: $\frac{x}{4}(x^2-2) \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C$.
4. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x+10}}$ Ж: $C - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3}{x+1} + \sqrt{\frac{9}{(x+1)^2} + 1} \right|$.
5. $\int \ln(x^2+1) dx$ Ж: $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctg x + C$.
6. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ Ж: $C - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right)$.
7. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^2 dx$ Ж: $C - 2e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 4x + 8)$.
8. $\int \cos \ln x dx$ Ж: $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) + C$.

3- §. Қаср-рационал функцияни энг содда қасрларга ёйиш. Рационал функцияларни интеграллаш

6.3.1. Иккита кўпхаднинг нисбатига тенг

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

функция қаср-рационал функция ёки рационал қаср дейилади, бунда m ва n $Q_m(x)$ ва $P_n(x)$ кўпхадларнинг даража кўрсаткичлари бўлиб, улар натурал сонлардир. $m < n$ да $R(x)$ қаср-рационал функция тўғри қаср, $m \geq n$ да эса нотўғри қаср дейилади.

Қуйидаги тўғри қасрлар энг содда қасрлар дейилади:

$$\text{I. } \frac{A}{x-\alpha}.$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \text{ бунда } k \geq 2 - \text{ бутун сон.}$$

$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \text{ бунда } D=p^2-4q < 0.$$

$$\text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}, \text{ бунда } s \geq 2 - \text{ бутун сон, } D=p^2-4q < 0.$$

Юқоридаги касрларда A, B, p, q, α — хақикий сонлар.

6.3.2. Ҳар қандай хақикий коэффициентли n -даражали $P_n(x)$ кўпхад хақикий сонлар тўпламида ушбу кўринишда тасвирланиши мумкин:

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-\alpha_p)^{k_p} (x^2+px+q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2+px+q_l)^{s_l},$$

бунда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ $P_n(x)$ кўпхаднинг мос равишда $k_1, \dots, k_p$ каррали хақикий илдиэлари, ҳамма квадрат учхадлар учун дискриминант $D_i < 0$ ($i = \overline{1, l}$); $k_1 + \dots + k_p + 2s_1 + \dots + 2s_l = n$; $k_1, \dots, k_p, s_1, \dots, s_l$ — натурал сонлар; a_0 — $P_n(x)$ кўпхадда x^n олдидаги коэффициент.

Агар $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ тўғри рационал касрнинг махражи $P_n(x)$

юқорида кўрсатилгандек ифодаланган бўлса, у ҳолда бундай касрни I — IV кўринишдаги энг содда рационал касрлар йиғиндиси-га ёйиш мумкин. Бу ёйилмада $P_n(x)$ кўпхаднинг ҳар бир k каррали α илдиэига, яъни $(x-\alpha)^k$ кўринишдаги кўпайтувчига, ушбу k та касрлар йиғиндиси мос келади:

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

$P_n(x)$ кўпхаднинг s каррали комплекс қўшма илдиэининг ҳар бир жуфтига, яъни $(x^2+px+q)^s$ кўринишдаги кўпайтувчига ушбу s та касрдан иборат йиғинди мос келади:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}.$$

Ёйилмадаги A_i, N_i, M_i коэффициентларни топишда хусусий кийматлар усули ёки номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланилади. Баъзан бу икки усул биргаликда қўлланилади.

$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ рационал каср *ноғўғри каср* бўлган ҳолда бутун

кисмини ажратиб, сўнгра тўғри каср кисми юқоридаги каби энг содда касрларга ёйилади.

1- мисол. Ушбу

$$R(x) = \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)}$$

рационал касрни энг содда касрларнинг йиғиндисига ёйинг.

Ечиш. Берилган $R(x)$ рационал каср тўғри каср. Махражининг ҳамма илдизлари (3, -4, 1) бир каррали (оддий) ва хакикий, шунинг учун

$$R(x) = \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+4)} + \frac{C}{(x-1)},$$

бунда A, B, C — аниқланиши керак бўлган коэффициентлар. Тенгликнинг ўнг қисмини умумий махражга келтириб, иккала қисмининг ҳам махражларини ташлаб юборсак:

$$15x^2 - 4x - 81 = A(x+4)(x-1) + B(x-3)(x-1) + C(x-3)(x+4).$$

а) *Хусусий қийматлар усулининг* мазмуни шундаки, унда ҳосил бўлган айниятга x нинг ҳар хил (одатда махражнинг хакикий илдизлари) қийматлари қўйилади. Қаралаётган мисолда бу қуйидагича амалга оширилади:

$$\begin{array}{l|l} x=3 & 42=14A, \\ x=-4 & 175=35B, \\ -x=1 & 70=-10C. \end{array}$$

Ҳосил қилинган тенгламалар системасидан $A=3, B=5, C=7$. Шундай қилиб,

$$R(x) = \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{3}{x-3} + \frac{5}{x+4} + \frac{7}{x-1}.$$

б) *Номаълум коэффициентлар усулининг* моҳияти шундаки, унда ҳосил бўлган айниятда x нинг ўнгдаги ва чапдаги бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси тузилади, яъни:

$$\begin{array}{l|l} x^2: & 15=A+B+C, \\ x: & -4=3A-4B+C, \\ x^0: & -81=-4A+3B-12D. \end{array}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечиб, $A=3, B=5, C=7$ эканини топамиз.

2- мисол. Ушбу рационал касрни содда касрлар йиғиндисига ёйинг:

$$R(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Е ч и ш. Тўғри рационал касрни қуйидагича ёямиз:

$$R(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Бундан

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Коэффициентларни топиш учун юқорида баён қилинган иккала усулдан ҳам биргаликда фойдаланамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 1=4A, \\ x=-1 & -1=-2C, \\ x^2\text{да} & 0=A+B. \end{array}$$

$$\text{Системани ечсак, } A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$R(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

3- м и с ол. Қуйидаги рационал касрни содда касрларга ёйинг:

$$R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)}.$$

Е ч и ш. Рационал каср тўғри касрдир, уни энг содда касрларга ёямиз:

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} + \\ &+ \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}. \end{aligned}$$

Ушбу

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 &= A(x^2 + 2x + 3)^2 + \\ &+ (Bx + C)(x+1)(x^2 + 2x + 3) + (Dx + E)(x+1). \end{aligned}$$

тенгликдан фойдаланиб номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 4=4A, \\ x^4\text{ да} & 1=A+B \\ x^3\text{ да} & 4=4A+2B+C, \\ x^2\text{ да} & 11=10A+3B+3C+D \\ x\text{ да} & 12=12A+B+5C+D+E. \end{array}$$

Тенгламалар системасини ечсак,

$$A=1, B=0, C=0, D=1, E=-1.$$

Демак,

$$R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$$

6.3.3. Тўғри рационал касрларни интеграллаш энг содда касрларни интеграллашга келтирилади.

I. $\int \frac{A dx}{x - \alpha} = A \ln |x - \alpha| + C.$

II. $\int \frac{A dx}{(x - \alpha)^k} = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| +$
 $+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$

IV. $\int \frac{(Ax + B) dx}{(x^2 + px + q)^s} = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^s} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^s},$

бунда

$a^2 = q - \frac{p^2}{4}, t = x + \frac{p}{2}$ белгилашлар киритиб, иккинчи интеграл

$I_s = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^s}$ кўринишга келтирилади ва у куйидаги рекуррент формула ёрдамида топилади:

$$I_s = \frac{t}{2(s-1)a^2(t^2 + a^2)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2(s-1)a^2} I_{s-1}.$$

4- м и с о л. Интегрални ҳисобланг: $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+8} dx.$

Е ч и ш.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4) + 6-1}{x^2-4x+8} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2-4x+8| + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2-4x+8| + \frac{5}{2} \arctg \frac{x-2}{2} + C. \end{aligned}$$

5- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx.$$

Е ч и ш.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 3 + 2}{(x^2+2x+10)^2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+2x+10)}{(x^2+2x+10)^2} - \\ &- \int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+3^2]^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2x+10} - I_2. \end{aligned}$$

Бунда $I_2 = \int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+3^2]^2}$, $s=2$, $u=x+1$ ва $a^2=9$ деб белгилаб, юкоридаги рекуррент формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{du}{(u^2+9)^2} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 1} \left(\frac{u}{u^2+9} + (2 \cdot 2 - 3) I_1 \right) = \\ &= \frac{1}{18} \left(\frac{u}{u^2+9} + \int \frac{du}{u^2+9} \right) = \frac{1}{18} \left(\frac{u}{u^2+9} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} \right). \end{aligned}$$

Ўзгарувчи x га кайтсак,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{18} \left(\frac{x+1}{(x+1)^2+9} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{18} \left(\frac{x+1}{x^2+2x+10} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} \right). \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2} &= -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{x+1}{18(x^2+2x+10)} - \\ &- \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$

6.3.4. $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ рационал касрни интеграллашдан олдин куйидаги

алгебраик алмаштиришлар ва ҳисоблашлар бажарилади:

а) берилган каср тўғри каср эканини текшириш; агар каср нотўғри бўлса, у ҳолда унинг бутун қисмини ажратиш, яъни

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$$

шаклга келтириш, бунда $q(x)$ — кўпхад, $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ эса тўғри рационал каср;

б) касрнинг махражи $P_n(x)$ ни $(x-\alpha)^k$ ва $(x^2+px+q)^s$ кўри-
нишдаги чизиқли ва квадрат кўпайтувчиларга ажратиш
($p^2-4q < 0$);

в) тўғри рационал касрни энг содда касрлар йиғиндисига ёйиш;

г) ёйилманинг коэффициентларини ҳисоблаш.

б- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} dx.$$

Е ч и ш. Берилган рационал каср нотўғри каср бўлганлиги учун унинг бутун қисмини ажратамиз:

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} \left| \frac{x^4-8x^2+16}{x} \right. \\ \frac{x^5-8x^3+16x}{8x^3-16x+1}$$

Демак,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = \\ = x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Тўғри касрни энг содда касрлар йиғиндисига ёямиз:

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}.$$

Махражлардан қутулсак,

$$8x^3-16x+1 = A(x+2)^2(x-2) + B(x+2)^2 + \\ + C(x-2)^2(x+2) + D(x-2)^2.$$

Номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси-
ни тузамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=2 & 33=16B, \\ x=-2 & -31=16D, \\ x^3 \text{ да} & 8=A+C \\ x^2 \text{ да} & 0=2A+B-2C+D. \end{array}$$

Бу системани ечиб, коэффициентларни топамиз:

$$A = \frac{127}{32}, B = \frac{33}{16}, C = \frac{129}{32}, D = -\frac{31}{16}.$$

Демак,

$$\int \frac{(x^5+1)dx}{x^4-8x^2+16} = \int \left(x + \frac{\frac{127}{32}}{x-2} + \frac{\frac{33}{16}}{(x-2)^2} + \frac{\frac{129}{32}}{x+2} - \frac{\frac{31}{16}}{(x+2)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{127}{32} \ln|x-2| - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{129}{32} \ln|x+2| + \frac{31}{16(x+2)} + C.$$

3- дарсхона топириғи

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

- $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx.$ Ж: $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{1}{3} \ln \frac{|x|^3}{(x-2)^2(x+1)} + C.$
- $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} dx.$ Ж: $C - \frac{2}{x-1} + \ln \frac{|x|^3}{|x-1|}.$
- $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx.$ Ж: $C - \frac{x}{(x-1)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|}.$
- $\int \frac{x dx}{x^3+1}.$ Ж: $C + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$
- $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}.$ Ж: $C + \frac{2}{3\sqrt{7}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} \arctg(x+2).$
- $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$ Ж: $C + \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

3- мустақил иш

Аниқмас интегралларни топинг:

- $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx.$ Ж: $5x + \ln x^2(x+2)^4|x-2|^3 + C.$
- $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$ Ж: $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right| + C.$
- $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$ Ж: $C - \frac{1}{x-2} - \arctg(x-2).$